

Atelier sur les pavages I : les formes qui pavent « ou presque » le plan

Paolo Bellingeri-Université de Caen

Matériel: des Attrimaths ou tout autre jeu de mosaïques, papier et ciseaux. On pourrait préparer des pièces particulières avec une imprimante 3D ou une découpe laser d'un fab-lab; par exemple des pentagones réguliers, des pentagones de Heesch [1], des pentagones ou des hexagones non réguliers qui pavent le plan [2, 3, 4]. On peut envisager d'utiliser des logiciels (Géogebra, Inkscape, Scratch...).

Durée: une, voir deux ou trois séances de 1h30-2h .

But: Explorer les différents aspects des pavages, en mathématiques mais aussi dans les arts, la chimie, l'informatique. On pourra en particulier souligner la notion de *classification*. Les pavages présentent des problèmes ouvertes et des problèmes qui ont été résolus seulement très récemment; c'est un thème de recherche encore aujourd'hui!

Démarrage (15 minutes):

Tour de table au tour des pavages dans les maisons, dans les églises; quelles formes on retrouve souvent. Les pavages comme « carrelages » du plan. Quelles formes se pretent à paver le plan?

Pistes de discussions:

- Un triangle pave t'il le plan? Et un quadrilatère?
- Proposer des formes au tableau, avec Géogebra, à découper... Proposer de répondre « oui » ou « non » avant de manipuler les formes.

Atelier sur triangles, quadrilatères et « gros polygones » (30-45 minutes):

Manipuler des pièces (e.g. des Attrimath); suivre e. g. [2] pour arriver à la conclusion que « tout triangle pave le plan » et que « tout quadrilatère pave le plan. Aborder la notion de polygone convexe. Enoncer le théorème qui affirme que tout polygone convexe avec plus de 6 cotés ne pave pas le plan. Montrer des polygones NON convexes avec plus de 6 cotés qui pavent le plan [2].

Atelier sur les pentagones et les hexagones (30 - 45 minutes):

Manipuler des pentagones; le pentagone régulier ne pave pas mais des autres pentagones pavent le plan, et en plus souvent de plusieurs façons « différentes » [4].

Raconter l'histoire du problème des pentagones qui pavent les plan (résolu seulement en 2017 !). Aborder la notion de classification avec les hexagones [2].

Le pentagone de Heesch [1] permet d'aborder le problème des formes qui pavent « presque » le plan: c'est l'occasion de présenter des *problèmes ouverts*.

Facultatif: Atelier sur les « enveloppes qui pavent » (30-45 minutes):

Explorer comment fabriquer des formes « surprenantes » qui pavent le plan à partir d'une enveloppe et une paire de ciseaux [6 a)]. Attention: cette partie peut devenir une séance entière de 1h30-2h si on décide d'aller plus loin et aborder le thème des « groupes de symétries » d'un pavage [6 b)].

Facultatif: Atelier sur les pavages apériodiques (30 minutes -1h30):

Plutôt pour un publique de 2nde

Présentation des pavages apériodiques [5 a, b, c]: en particulier aborder le processus de substitution (e.g. activités [5b]) et l'écriture informatique (avec Inkscape [5c]). Les laboratoires de Mathématiques de Amiens, Caen, Rouen et Tours disposent de plusieurs pièces de Penrose, souvent disponibles « sur demande ».

Sitographie

*il s'agit juste ici de possibles références; le web regorge de sites sur ces thématiques,
mais il faut faire attention évidemment à la fiabilité de la source*

[1] Problème de Heesch, les pièces qui pavent « presque » le plan: <https://cahier-de-prepa.fr/mp-charlemagne/download?id=629>

[2] Les triangles et les quadrilatères pavent le plan; la classification des hexagones qui pavent le plan <https://bellingeri.users.lmno.cnrs.fr/webpaolotassellazioni/html/carreleur.html>

[3] Les pentagones qui pavent le plan: une longue histoire passionnante! <https://www.pourlascience.fr/sd/mathematiques/paver-le-plan-avec-un-pentagone-convexe-9961.php>

[4] Les pavages du Caire: https://fr.wikipedia.org/wiki/Pavage_du_Caire

[5] Les pavages de Penrose:

a) <https://mrs.univ-rouen.fr/sites/mrs.univ-rouen.fr/files/images/PosterPenrose.png>

b) <http://sorciersdesalem.math.cnrs.fr/Penrose/penrose.html>

c) <http://sorciersdesalem.math.cnrs.fr/Penrose/penrose-inkscape.html>

d) https://fr.wikipedia.org/wiki/Pavage_de_Penrose

[6] Les enveloppes qui « pavent » le plan:

a) http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/jeux_mat/textes/pavage_enveloppe.htm

b) <https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~morales/pavage.html>

Pour toute information complémentaire, suggestion ou amélioration: paolo.bellingeri@unicaen.fr